



Оценка неопределенности измерений

Лекция 9. Метод Монте-Карло, коэффициенты чувствительности и иерархические эксперименты

Лектор: Байжұма Жандос Ескендірұлы

+7 707 556 60 08 / zhandos.baizhuma@kaznu.edu.kz

Основные темы лекции

01

Метод Монте-Карло

Численное моделирование распределений выходной величины через случайное варьирование входных параметров

02

Коэффициенты чувствительности

Оценка степени влияния каждой входной величины на итоговую неопределенность

03

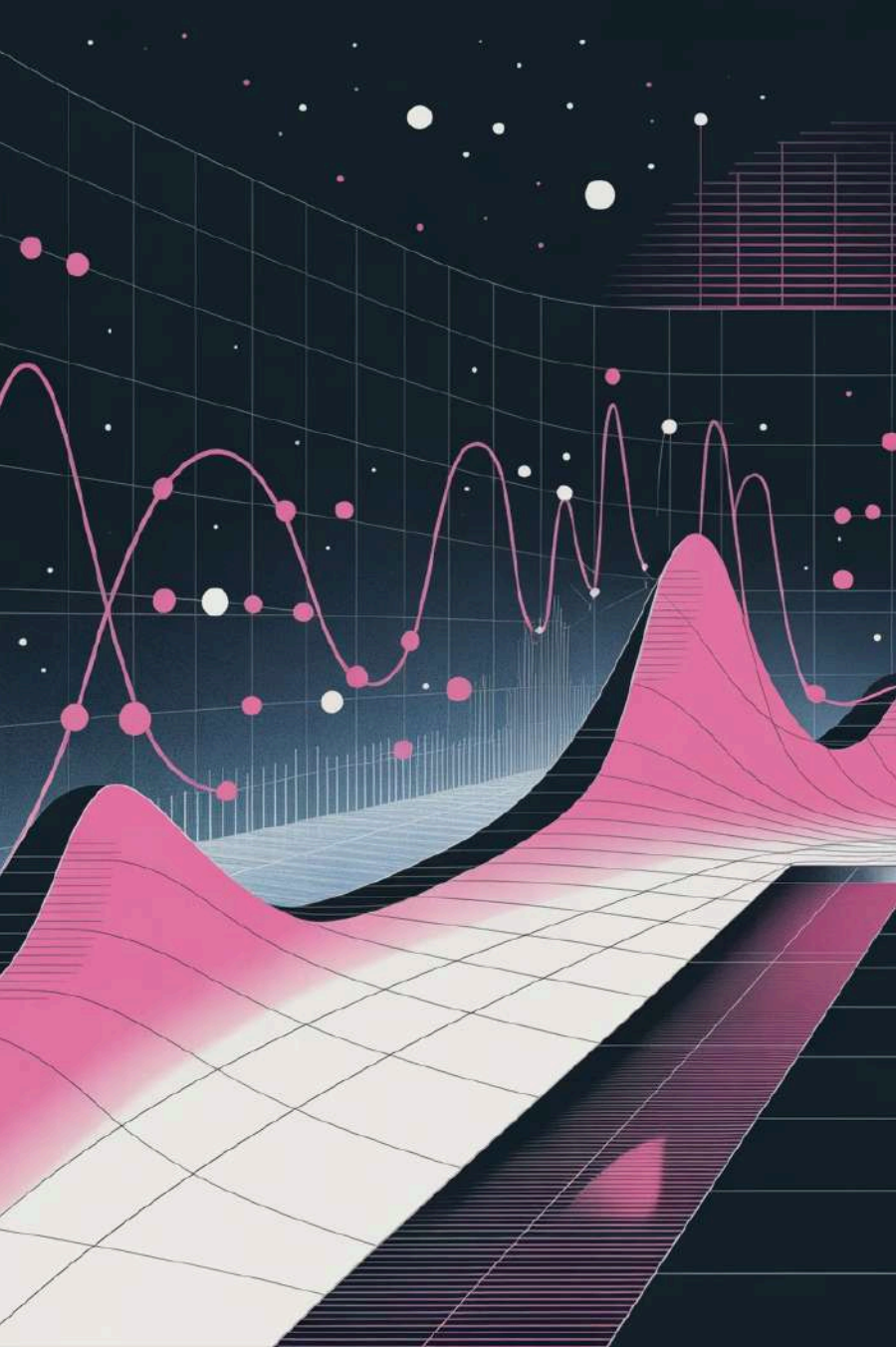
Преобразование координат

Упрощение анализа взаимозависимых величин и учет корреляций

04

Иерархические эксперименты

Многоуровневая структура измерений с учетом неопределенности на каждом уровне



Метод Монте-Карло

Статистический подход, основанный на использовании случайных чисел для моделирования сложных систем. Применяется когда аналитическое решение невозможно или трудоемко.

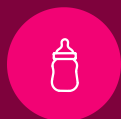
Суть метода: многократное повторение экспериментов с случайными данными для получения распределения вероятностей и статистических характеристик системы.

Ключевые применения

- Вычисление коэффициентов чувствительности
- Калибровка моделей
- Оптимизация процессов
- Анализ рисков

Коэффициент чувствительности

Показывает, насколько сильно результат измерения u изменяется при изменении входной величины x_i .
Используется при оценке комбинированной неопределенности.



Определение

Частная производная функции по входной величине

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$



Положительный

$c_i > 0$: увеличение входной величины увеличивает результат



Отрицательный

$c_i < 0$: увеличение входной величины уменьшает результат



Чем больше $|c_i|$, тем сильнее влияние данной величины на общий результат

Комбинированная неопределенность

Базовая формула

Для независимых величин:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i \cdot u(x_i))^2}$$

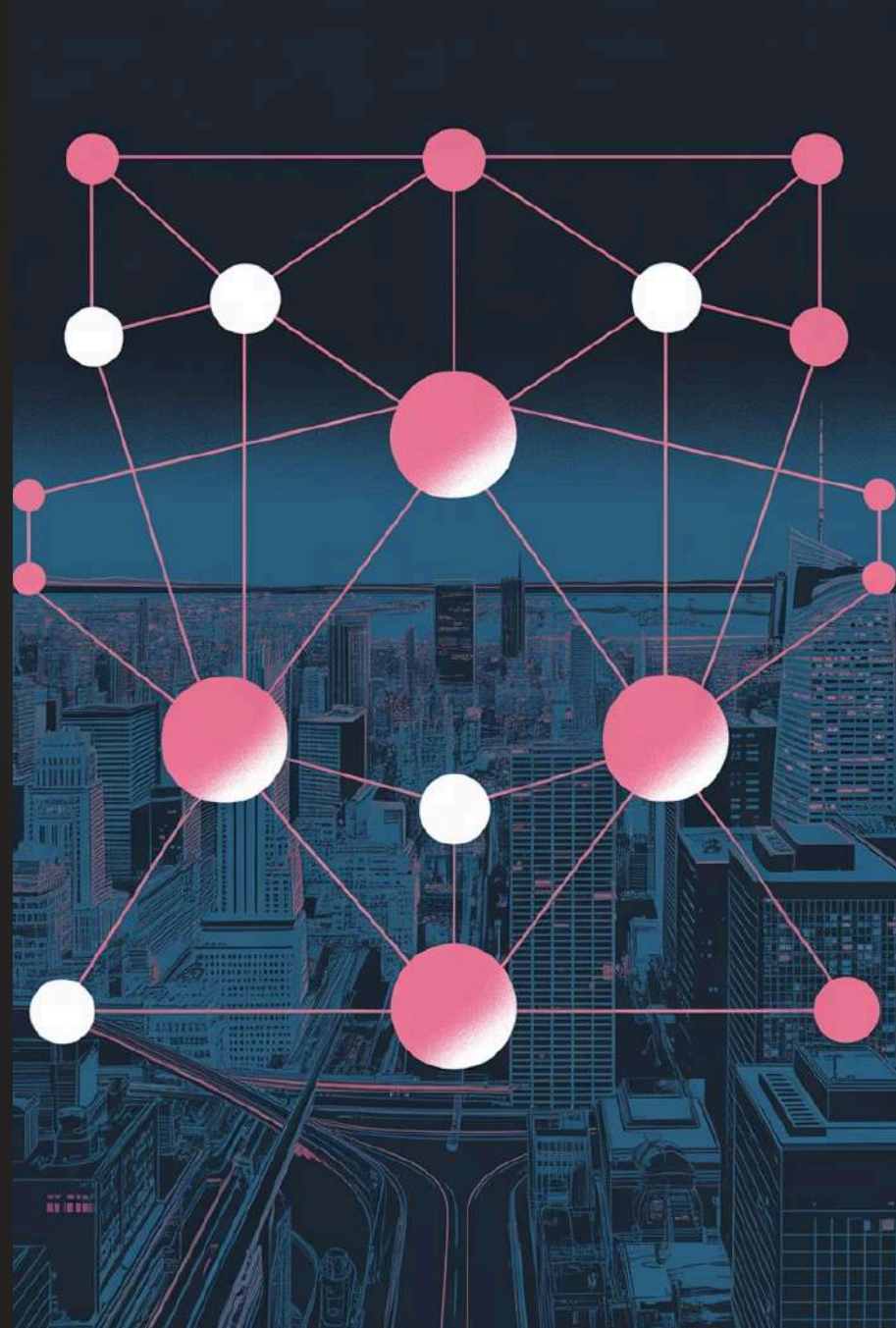
где $u(x_i)$ — стандартная
неопределенность входной
величины

С учетом корреляции

При наличии корреляции
между величинами:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i \cdot u(x_i))^2 + 2 \sum_{i < j} r_{ij} c_i c_j u(x_i) u(x_j)}$$

где r_{ij} — коэффициент
корреляции



Пример: измерение плотности

Плотность вычисляется по формуле $\rho = m/V$



Коэффициент по массе

$$c_m = \frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{1}{V}$$



Коэффициент по объему

$$c_V = \frac{\partial \rho}{\partial V} = -\frac{m}{V^2}$$

$$\frac{f}{dx}$$

Итоговая неопределенность

$$u_c(\rho) = \sqrt{\left(\frac{u(m)}{V}\right)^2 + \left(\frac{m \cdot u(V)}{V^2}\right)^2}$$



Преобразование системы координат

Зачем нужно?

- Упрощение вычислений
- Анализ взаимосвязей между величинами
- Учет геометрических факторов

Пример: переход от декартовой (x, y, z) к полярной (r, ϕ, θ) системе координат

Пересчет неопределенности

При переходе от (x, y) к (r, ϕ) :

$$\begin{aligned} u(r) &= \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial x} u(x)\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y} u(y)\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{x}{r} u(x)\right)^2 + \left(\frac{y}{r} u(y)\right)^2} \end{aligned}$$

Иерархические эксперименты

Многоуровневая структура измерений, где каждый уровень вносит собственную неопределенность



Исходные данные

Первичная неопределенность входных параметров



Параметры модели

Неопределенность калибровки и настройки



Условия эксперимента

Влияние внешних факторов и окружения



Итоговый результат

Комбинированная неопределенность всех уровней

Метод Монте-Карло позволяет количественно оценить неопределенности на каждом уровне и определить доверительные интервалы